25. 函數ノ單葉性ノ一判定條件

高橋進一（阪大）

$f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ ガ $|z|<1$ ヲ單位円ト餘リ違ハナイ樣ナ domain ニ寫像スルトキ、$f(z)$ ハ $|z|<1$ デ schlicht ニナルコトハ想像デキルガドノ程度迄 $f(z)$ ガ z ニ接近シテ居レバ十分デアルカ？ コレニ對スル一ツノ答トシテ次ノ定理ヲ證明シヨウ。

$f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ ヲ $|z|\leqq\rho$ ($\rho>1$, 任意) デ正則ナ解析函數トスルトキ $|z|=\rho$ ナル円周上デ

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^4}\quad\left(<\sqrt{2}\right)$$

ナル關係ガアレバ $f(z)$ ハ $|z|<1$ デ schlicht トナル。

證明ハ至ッテ簡單デアル。先ヅ $f(z)$ ヲ

$$(1)\qquad f(z)=z+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z)}\,d\zeta$$

ナル形ニ表ハシ、次ニ z_1, z_2 ヲ單位円内ノ任意ノニ点トスレバ (1) ヨリ

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=1+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\,d\zeta$$

トナル。故ニ $f(z)$ ガ $|z|<1$ デ schlicht トナルタメニハ

$$(2)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\,d\zeta\right|<1$$

ナル關係ガアレバ十分デアル。(2) ノ左辺ニ Schwarz ノ不等式ヲ使フト

$$(3)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\frac{f(\zeta)-\zeta}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\,d\zeta\right|\leqq\frac{\rho}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}|f(\zeta)-\zeta|^2d\theta\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|\zeta-z_1|^2|\zeta-z_2|^2}\right]^{\frac{1}{2}}_{\zeta=\rho e^{i\theta}}$$

$$\leqq\frac{\rho}{2\pi}\left[2\pi\left(\int^{2\pi}|f(\zeta)|^2d\theta-\rho^2\right)\frac{2\pi}{(\rho-1)^4}\right]^{\frac{1}{2}},\quad\frac{\rho}{(\rho-1)^2}\left(M^2(\rho)-\rho^2\right)$$

但シ　$M(\rho)=\max_{|z|=\rho}|f(z)|$.　

故ニ

$$(4)\qquad \frac{\rho}{(\rho-1)^2}\left(M^2(\rho)-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}<1$$

ガ成立スレバ $f(z)$ ハ $|z|<1$ デ schlicht トナル。

(4) ヲ書キ改メルト

$$M(\rho)<\rho\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^4}$$

$f(0)=0$ ダカラ コレハ又

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^4}\qquad |z|=\rho$$

ト書ケル。

$f(z)$ ガ $|z|\leqq\rho$ デ pole ヲ除イテ正則且 $\alpha\neq 0$ ニ対シテ $f(\alpha)\neq 0$ トスレバ $|z|=\rho$ ナル圓周上デ $|f(z)|>m(\rho)$ ナル不等式ヨリ $f(z)$ ノ單位圓内ニ於ケル單葉性ガ云ヘル様ナ $m(\rho)$ ガ存在スル事ハ以前 Bieberbach ガ証明シタ事ガアル。

次ニ $f'(z)$ ニ対スル條件カラ $f(z)$ ノ單位圓内ニ於ケル單葉性モ云ヘナイ事ハナイ。

今 $|z|\leqq\rho$ デ $f(z)$ ガ正則ナリトシ

$$\max_{|z|=\rho}|f(z)|=M(\rho),\qquad \max_{|z|=\rho}|f'(z)|=M'(\rho)$$

トスレバ Borel ノ不等式ニ依テ

$$M(\rho)<\rho M'(\rho)$$

故ニ最初ニ掲ゲタ定理デ不等式ヲ

$$|f'(z)| < \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^4} \quad (< \sqrt{2})$$

ト置換ヘレバ定理ハ尚更成立スル譯デアル。

最後ニ $|f'(z)| > m(\rho)$, $|z|=\rho$ ナル條件カラ $f(z)$ ノ單葉性ヲ云々スル事ハ出來ナイ樣デアル。角谷君ハ次ノ例デ其ヲ示サレタ。即チ $f(z)=z+\frac{2}{n}z^n$ トスレバ $f'(z)=1+2z^{n-1}$ デアルカラ $|f'(z)| > 2\rho^{n-1}-1$ $|z|=\rho>1$

故ニ如何ナル $m(\rho)$ ガ存在シテモ其ガ ρ ノ定ツタ函數デアル限リ n ヲ充分大キクトレバ $2\rho^{n-1}-1 > m(\rho)$ 依テ $|f'(z)| > m(\rho)$ 然ルニ $f'(z)$ ハ $z=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ ナル點デ零トナルカラ明ラカニ $f(z)$ ハ單位圓内デ schlicht トハナラヌ。

是デ見ルト唯或圓周上デノミ $|f'(z)| > m > 0$ ヲ假定シテモ巧クユカヌ樣デアルガ z ノ domain 全体デ假定スレバ又話ハ別デアル。實際 normal family ノ理論カラ

$$|f'(z)| > m(D) > 0$$ （z ハ領域 D 内ノ任意ノ點）

ナル制限ノ下ニ $f(z)$ ガ D 内デ schlicht ナル事ガ云ヘル樣ナ $m(D)$ ガ存在スル事ハ吉田君ノ御注意デ知ツタ。此處デ特殊ナ D ニ對シテ $m(D)$ ノ値ヲ或程度迄決定スル事ガ出來タラ大變面白イト思フ。